PALP

Parque Astronómico
de La Punta

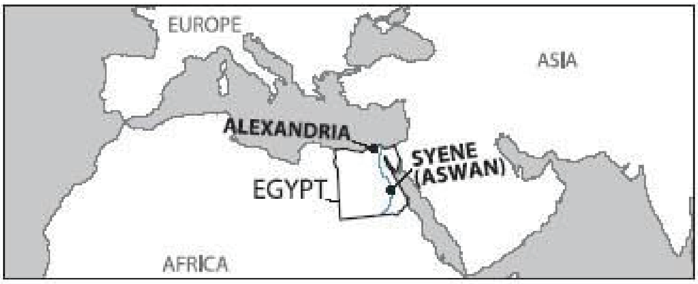
Proyecto
Eratóstenes
en San Luis

Midamos el perímetro de la Tierra

Guia para el estudiante y el docente

El proyecto Eratóstenes
Guia para el estudiante

En esta actividad vas a trabajar en colaboración con estudiantes de otras escuelas para medir el radio de la Tierra, y a usar los mismos métodos y principios que Eratóstenes usó hace más de dos mil años.



Eratóstenes fue un griego que vivió en Alejandría, Egipto, en el siglo III A.C. Él sabía que un día determinado, al mediodía, en Siena (Syene en el mapa, actualmente Aswan), una ciudad ubicada a una distancia considerable de Alejandría hacia el sur, la luz del sol entraba de forma totalmente vertical dentro de un pozo profundo. Esta observación significaba que el sol se encontraba exactamente sobre la ciudad de Siena, como se muestra en la Figura 1. Eratóstenes también sabía que mientras que esto ocurría en Siena, no sucedía lo mismo en Alejandría (ver Figura 2). Noten que en ambas figuras los rayos del sol son todos paralelos entre sí.

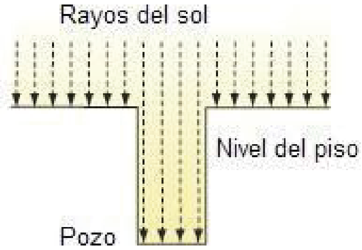


Figura 1:
Los rayos del sol entran de modo perfectamente vertical dentro del pozo ubicado en Siena, cuando el sol está exactamente sobre esta ciudad (el 21 de junio al mediodía). En ese momento, las paredes no proyectan sombra alguna.

[1] ~~Adaptación para la Argentina del proyecto~~ WYP Eratosthenes Project http://www.physics2005.org/events/eratosthenes/ organizado en Estados Unidos en ocasión del año internacional de la física 2005.

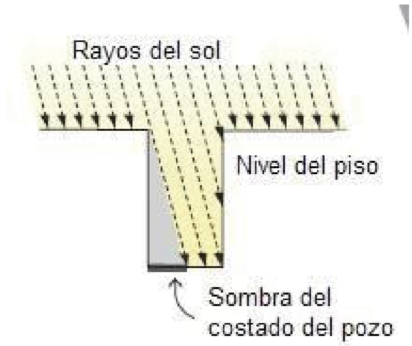


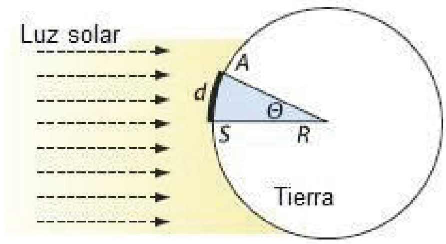
Figura 2: En el mismo momento que en Siena los rayos del sol entran al pozo como en la Figura 1, en Alejandría los rayos entran formando un ángulo con la vertical. Acá el sol no está directamente sobre la ciudad y las paredes proyectan cierta sombra (que en el dibujo está exagerada).

En la Figura 2,las paredes de un lado del pozo proyectan sombra sobre el fondo. Eratóstenes usó una sombra como ésta para calcular el perímetro de la Tierra. Cuando el sol estaba exactamente sobre Siena (al mediodía del 21 de junio), midió la sombra de un objeto en Alejandría. Conociendo el largo del objeto y el de su sombra y con la distancia entre Siena y Alejandría calculó el perímetro terrestre. El valor que obtuvo es muy similar al conocido actualmente.

¿Cómo hizo Eratóstenes para determinar el perímetro terrestre?

¿Cómo hizo Eratóstenes para medir el radio de la Tierra más de dos mil años atrás? Miren la Figura 3. Siena está representada por el punto S y Alejandría por el punto A, ambos puntos sobre la superficie de la Tierra a la que se ve como un círculo. En la Figura 3, la longitud de arco entre S y A es d, y el ángulo correspondiente a este arco es θ. El radio de la Tierra es R. Supongamos que los rayos del sol llegan en forma paralela a la Tierra. La Figura 3 corresponde al momento en que el sol está justo sobre la ciudad de Siena. En ese caso, los rayos inciden perpendicularmente a la superficie de la Tierra en la ciudad de Siena, y por lo tanto tienen la misma dirección que el radio de la Tierra que une esta ciudad con el centro de la esfera terrestre (ver Figura 3).

Figura 3:



El sol está exactamente sobre la ciudad de Siena (indicada con una S sobre la superficie de la Tierra). La ciudad de Alejandría está indicada con la letra A.

Cuando el sol se encontraba exactamente sobre la ciudad de Siena, Eratóstenes midió la sombra de una torre en Alejandría, como se muestra en la Figura 4. Es decir, midió dicha sombra al mediodía del 21 de junio. La torre es perpendicular a la superficie de la Tierra en el punto A, y por lo tanto tiene la dirección del radio que une al centro terrestre con el punto A. Dado que todos los rayos del sol son paralelos entre sí, se deduce de la Figura 4 que el ángulo que forman los rayos con la torre es θ, por ser alterno interno con el que subtiende el arco que une A con S.

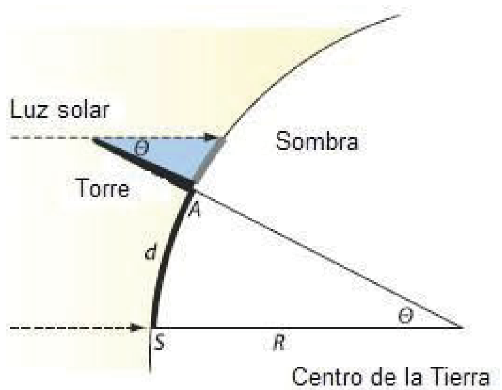


Figura 4:
La geometría del experimento de Eratóstenes. Midió la longitud de una torre y la de su sombra al mediodía del 21 de junio en Alejandría. Luego determinó el ángulo que formaban los rayos del sol con la vertical en esta ciudad. Este ángulo coincide con el que subtiende el arco de circunferencia que une las ciudades de Siena y Alejandría.

Cuando uno está parado en un lugar llano sobre la superficie de la Tierra es difícil percibir su curvatura. Da la sensación de que, más allá de las rugosidades del terreno, uno se encuentra sobre una superficie plana. En cada lugar sobre la superficie de la Tierra, esa superficie plana sobre la que nos da la sensación que caminamos o sobre la que se proyectan las sombras de los distintos objetos, es perpendicular a la vertical en el lugar de la Tierra donde uno se encuentra. Por lo tanto, la sombra de un objeto delgado en posición vertical (como la torre que midió Eratóstenes que se muestra en la Figura 4) y el objeto forman un ángulo recto entre sí. Si analizamos el experimento de Eratóstenes usando nociones de trigonometría (la que todavía no había sido descubierta en esa época) podemos describir la relación entre la altura de la torre, el largo de su sombra y el ángulo θ como:

tg(θ)=largo de la sombra / altura de la torre. (1)

Conociendo la tangente del ángulo, tg(θ), y sabiendo que θ es menor que 90º, podemos conocer el valor de θ. Por otro lado, la proporción del perímetro total de la Tierra, P, que representa la longitud de arco, d, que une los puntos S (la ciudad de Siena) y A (la ciudad de Alejandría) sobre la superficie de la Tierra,

d / P = θ / 360 (2)
y, reacomodando esta igualdad

P =360 d / θ (3)

¿Cómo van a determinar ustedes el valor del radio de la Tierra?

En este proyecto les sugerimos que, en lugar de determinar el perímetro de la Tierra, determinen directamente su radio. De ese modo van a poder comparar de un modo más sencillo el valor medido por ustedes con el valor aceptado.

Eratóstenes tuvo suerte porque conocía un lugar en donde el sol caía en forma exactamente vertical al mediodía. ¿Podrán ustedes hacer el experimento sin saber dónde hay un lugar así? Afortunadamente sí, como se muestra en las Figuras 5 y 6. Para ello, deberán colaborar con los chicos de otra escuela ubicada aproximadamente sobre el mismo meridiano que la escuela de ustedes, pero a una cierta distancia al norte o al sur (a la que llamamos d) del lugar de su escuela. La coordinación del proyecto les dará la información de con qué escuela pueden colaborar y cuál es el valor de d. Una vez establecido con quien colaborarán,ambas escuelas deberán medir el largo y la sombra de una varilla o estaca y compartir el resultado de su medición. El ángulo que se necesita para hacer cálculos similares a los descritos en la sección anterior es en este caso la diferencia entre los ángulos calculados en cada escuela, como explicamos más adelante. Tienen que planificar de antemano cuándo van a medir y combinar con los chicos de la otra escuela. Idealmente, ambas escuelas deben hacer sus mediciones el mismo día.

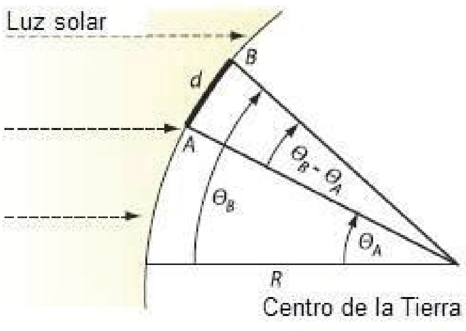


Figura 5:
La geometría para medir el radio de la Tierra usando datos de dos escuelas que colaboran entre sí en la realización del experimento. Las escuelas, ubicadas en los puntos A y B, están separadas por una distancia, d, en la dirección norte-sur. Los alumnos de cada escuela miden el ángulo que forman los rayos del sol con la vertical al mediodía en el lugar donde está su escuela.

Universidad de LA PUNTA
Universidad de La Punta
Av. Universitaria s/n
Ciudad de La Punta CP 5710
Mesa de Entrada: 0266 4452000 (int. 6086)
GOBIERNO DE SAN LUIS

Llamamos a estos ángulos θ_A y θ_B. Idealmente, ambas escuelas deben medir este ángulo el mismo día.

En la Figura 5 los puntos A y B corresponden a la ubicación de las dos escuelas que colaboran entre sí. Estos dos puntos deben estar ubicados aproximadamente sobre un mismo meridiano terrestre, es decir, separados por una distancia norte-sur a la que llamamos d en la Figura 5. El experimento va a funcionar mejor cuanto mayor sea d. Miren la Figura 6. Los ángulos que es necesario determinar son θ_A y θ_B.

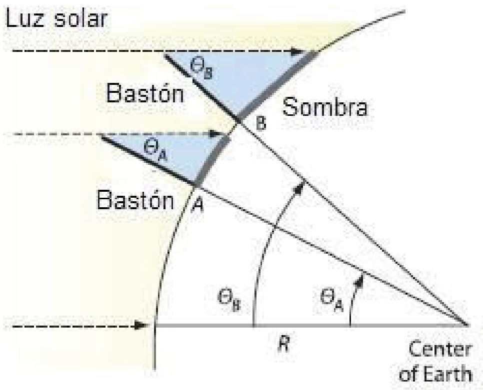


Figura 6:
La relación entre la dirección de los rayos del sol, las estacas y los dos ángulos, θ_A y θ_B.

Los chicos de la escuela ubicada en A miden la longitud de su varilla y la de la sombra que proyecta el día acordado con la otra escuela al mediodía. A partir de esa medición calcula la tangente del ángulo que forman los rayos del sol con la vertical, θ_A, como explicamos antes:

$tg(\theta_A)$= largo de la sombra / largo de la varilla (4)

Los chicos de la escuela ubicada en B hacen lo mismo y calculan θ_B.

Las Figuras 5 y 6 muestran que el ángulo que subtiende el arco que une los puntos A y B es la diferencia entre θ_A y θ_B. Por lo tanto, podemos usar la fórmula (3) reemplazando el perímetro, P, por su expresión en términos del radio, $P = 2\pi R$ y teniendo en cuenta que en lugar del ángulo θ debemos usar la diferencia $\theta_B - \theta_A$:

$2\pi R = 360\ d / \theta_B - \theta_A$. (5)

Reacomodando los términos y simplificando obtenemos:

$R = 180\ d / \pi(\theta_B - \theta_A)$. (6)

Nota: En toda la descripción anterior hemos supuesto que las dos escuelas se encuentran sobre el mismo meridiano. Si esto no es así, también pueden determinar el radio terrestre. En este caso la distancia d en las ecuaciones (5) y (6) no debe ser la distancia entre escuelas sino sólo la distancia norte-sur entre ellas. Una manera sencilla de determinar esta última es conocer la distancia entre cada escuela y el Ecuador (será provista por los organizadores en el momento de la inscripción de la escuela). Otra posibilidad es utilizar un mapa y medir sobre el mismo la distancia entre las latitudes correspondientes a las localidades de las dos escuelas. Este procedimiento puede realizarse también utilizando el Google Earth.

Escuelas en hemisferios diferentes durante un equinoccio

Cuando las dos escuelas pertenecen a hemisferios diferentes la ecuación 6 (de la sección anterior) sigue siendo válida para el cálculo del radio, si se toma la convención de que los ángulos tienen signos opuestos en ambos hemisferios. En otras palabras, la diferencia (θ_N -θ_S) debe reemplazarse por la suma de los módulos de los ángulos.

La siguiente figura ilustra la situación:

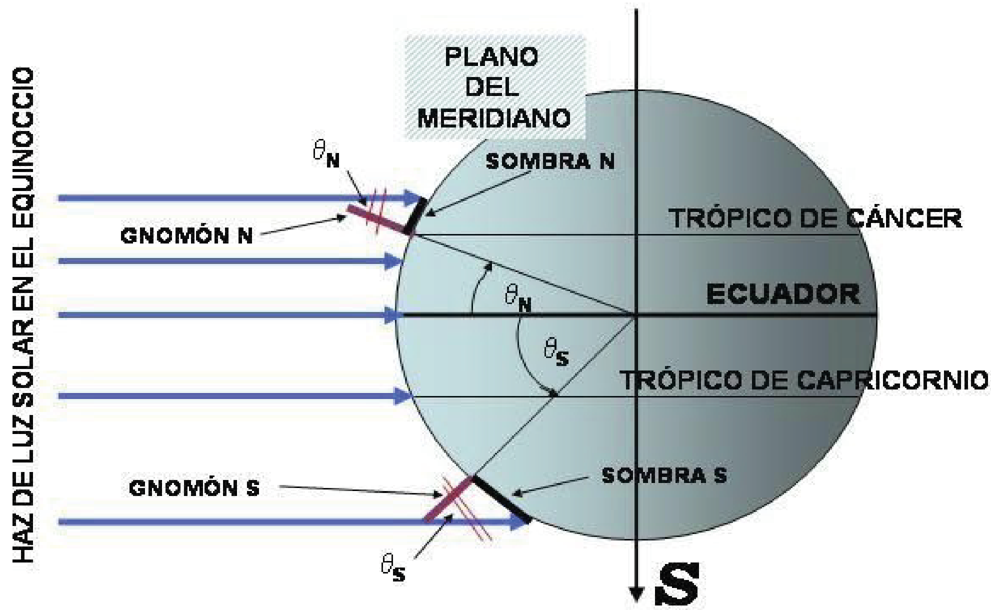


Figura 7:
La relación entre la dirección de los rayos del sol incidiendo sobre dos hemisferios, las estacas norte y sur y los dos ángulos, θ_N y θ_S.

La diferencia de ángulos (θ_N -θ_S) necesaria para calcular el radio, como en la sección anterior, en este caso involucra un valor negativo (por ejemplo, $\theta_S <$
0) y, entonces, la diferencia se transforma en la suma de los valores absolutos de ambos ángulos.

Haciendo la medición al mediodía exacto del lugar donde uno vive.

Cualquiera sea el día del año del que se trate, el mediodía en el lugar donde uno se encuentra es el momento del día en el que el sol alcanza su altura máxima en el cielo. Para determinarlo, claven la varilla con la que harán la medición en el piso, sobre una madera o sobre un telgopor, asegurándose de que esté perfectamente vertical usando una plomada o un nivel de carpintero. Midan el largo de la parte de la varilla que no ha quedado bajo el piso. Cuando la mañana esté suficientemente avanzada, empiecen a medir la longitud de la sombra de la varilla a intervalos regulares. La sombra va a ir disminuyendo a medida que se acerque el mediodía y luego, comenzará a aumentar, cuando el mediodía ya haya pasado. La longitud más corta que hayan medido es el largo de la varilla que entra en la ecuación (4).

El proyecto Eratóstenes
Guia para el docente

Notas sobre la Introducción

En la discusión de las Figuras 1 y 2, en las que se muestran dos pozos ubicados en dos lugares distintos, estamos suponiendo lo siguiente:
• Los rayos del sol son paralelos entre sí.
• Las paredes del pozo son verticales.

Notas sobre las suposiciones que tuvo que hacer Eratóstenes para calcular el perímetro de la Tierra

La Tierra es una esfera. En realidad, no es una esfera perfecta, sino que es más ancha en el Ecuador por alrededor del 3%, pero podemos apreciar esta pequeña diferencia en el radio medido en el Ecuador comparado con el valor que se puede obtener en otros lugares.
El Sol está muy lejos. Es por eso que los rayos solares que llegan a la Tierra son paralelos entre sí. Es verdad que el Sol está muy lejos, pero no es un punto: su diámetro es la centésima parte de la distancia entre el Sol y la Tierra.

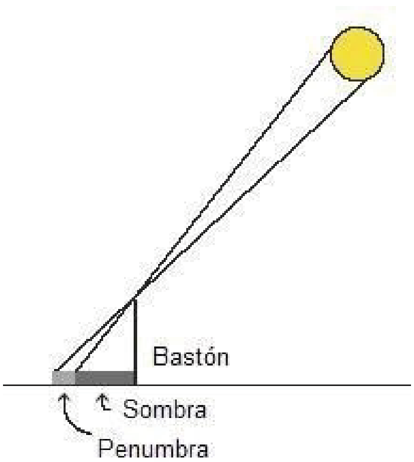


Figura 9:
Notar la penumbra—la región parcialmente nublada—donde termina la sombra del bastón (el dibujo no está hecho a escala).

Como se muestra en la Figura 9, hay una zona de penumbra donde termina la sombra de cualquier objeto, es decir, una zona que está parcialmente iluminada por el Sol. Si la varilla con la que se hará la medición tiene 1m de largo, la región de la penumbra será de largo mayor que 1 cm, lo que limita la

[2] Adaptación para la Argentina del proyecto WYP Eratosthenes Project http://www.physics2005.org/events/eratosthenes/ organizado en Estados Unidos en ocasión del año Internacional de la física 2005.

precisión con la que se puede medir la longitud de la sombra. El tamaño de la penumbra aumenta con el tamaño de la varilla, por lo tanto, usar un palo más largo no ayuda a lograr una medición de mayor precisión. Por otro lado, usar varillas demasiado cortas no sería apropiado porque las incertezas experimentales tendrían mayor importancia relativa. Varillas de longitud alrededor de 1m equilibran razonablemente ambas dificultades.

Alejandría está exactamente al norte de Siena: esta es sólo una aproximación. Busquen un atlas y comparen la ubicación de Alejandría y la de Asuán (construida donde antes estaba Siena).

El docente podría comentar con los alumnos las hipótesis de Eratóstenes teniendo en cuenta que hizo su medición hace más de dos mil años.

Notas sobre cómo se puede encontrar el radio de la Tierra.

El docente puede pedir a los alumnos que discutan acerca de la distancia que debe separar a las dos escuelas que vayan a colaborar en la medición. ¿Es mejor que d sea grande o pequeña? (grande). ¿Por qué? (cuanto más grande d, mayor será el valor del ángulo $\theta_B - \theta_A$ y por lo tanto, menor será el porcentaje de error de la medición). Una vez que la escuela obtiene la información de con qué otra escuela colaborará en la medición, el docente podrá mirar un mapa con los estudiantes y pedirles que calculen la distancia que separa ambas escuelas, midiendo en el mapa (y usando la escala del mapa). Podrá preguntarles también cuán bien están alineadas en la dirección norte-sur.

Es importante notar que la longitud de la sombra no cambia a lo largo del tiempo cerca del mediodía. Por esta razón, si uno no mide la sombra exactamente en el momento del mediodía el error que se puede cometer es pequeño. Es conveniente sugerir a los estudiantes que practiquen medir para identificar el mediodía unos días antes de hacer el experimento. El docente puede medir la sombra por su cuenta, controlando que efectivamente la varilla esté lo más vertical posible. Para ello, se puede pegar una hoja de papel sobre el cartón, revisando con el nivel de carpintero que el cartón esté horizontal. Es necesario asegurarse de que la varilla no sea tan alta que su sombra termine fuera de los límites del cartón. La longitud de la varilla que es necesario medir es la que va desde el extremo superior de la misma hasta la superficie donde se ve la sombra.

Es importante destacar que el momento de la medición tiene que ser el mediodía solar, cuando la longitud de la sombra es la más pequeña del día. Pero el medio solar en San Luis no es a las 12:00 como indica el reloj, sino que será aproximadamente a las 13:15 y variará un poco si estamos al este u oeste de la provincia.

Para que se vea bien como va cambiando de tamaño empezaremos 45 minutos antes a marcar donde cae la punta de la sombra, midiéndola cada 15 minutos y colocando también la hora de medición. Cuando estemos cerca de la hora, a las 13:00, lo haremos cada 5 minutos hasta las 13:30 donde la sombra comenzará a alargarse nuevamente.

Una vez que terminaste puedes unirla con una línea, así es más fácil identificar el momento la hora en que fue la sombra más corta para medir su longitud, que pudo haber sido entre medio de las mediciones.

Es muy importante aclarar que la medición de la sombra es desde el centro del estilete, si usaron uno muy ancho hay que tenerlo en cuenta.

Una vez que tengamos el largo de la sombra más corta del día lo que debemos hacer es conocer los ángulos que se formaron. Vamos a dibujar sobre la cartulina el estilete y su sombra con las medidas exactas, uniremos la punta del estilete con la de la sombra, formando un triángulo recto.

Ahora con la ayuda del transportador para estimar sus ángulos y utilizando una calculadora científica podemos obtener un valor más exacto.
El del ángulo lo calculamos usando la tangente:

$$tg(\theta) = \frac{largo\ de\ la\ sombra\ [cm]}{largo\ del\ estilete\ [cm]} \quad \Rightarrow \quad \theta = arctg\left(\frac{\text{largo de la sombra}}{\text{largo del estilete}}\right)$$